

MATHEMATISCHE APPROXIMATION

DYNAMISCHES VERHALTEN PNEUMATISCHER MUSKELN

Ersatzarbeit für die Bionikpraktika I und II
Chantal Imboden, Matr.Nr. 212345

Prof. Dr.-Ing. Ingo Rechenberg
Technische Universität Berlin
Fachgebiet für Bionik und Evolutionstechnik

Betreuer: Dipl.-Ing. Ivo Boblan

September 2004

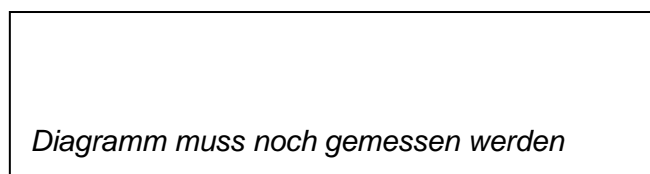
Inhaltsverzeichnis

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INHALTSVERZEICHNIS | 1 |
| 2 | DYNAMISCHES VERHALTEN PNEUMATISCHER MUSKELN | 2 |
| 3 | MATHEMATISCHE APPROXIMATION | 4 |
| 3.1 | APPROXIMATION MITTELS DES GAUßSCHEN FEHLERINTEGRALS | 5 |
| 3.2 | APPROXIMATION MITTELS DER SIGMOIDFUNKTION | 6 |
| 3.3 | DIE PARAMETER DER SIGMOIDFUNKTION | 7 |
| 3.4 | ZWEITER SCHENKEL DER HYSTERESISKURVE: DER „RÜCK-WEG“ | 9 |
| 3.5 | BERECHNUNG DER FUNKTION FÜR DIE KURVE DES „RÜCK-WEGES“ | 10 |
| 3.6 | NOCH AUSSTEHENDE MESSUNGEN | 12 |
| 4 | ANHANG: VARIABELDEKLARATION | 12 |

1 Dynamisches Verhalten pneumatischer Muskeln

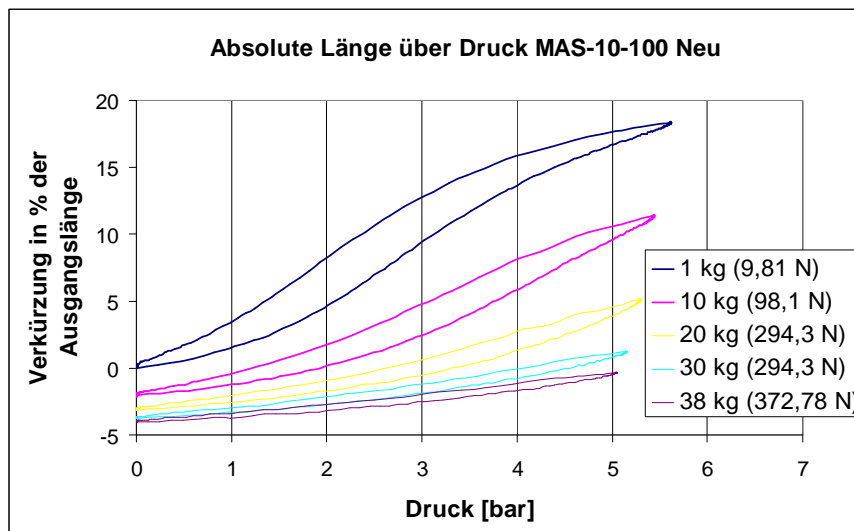
Hilse und Gutbrod zeigen in ihrer Studienarbeit anhand von Messreihen, dass die Kurven der Längenänderung des Muskels über dem Druck einer Hysteresiskurve gleichen. Folgende Diagramme sollen schematisch das dynamische Verhalten erklären. Zur Vereinfachung der mathematischen Approximation ist nicht wie üblich der Druck nach der prozentualen Länge aufgetragen, sondern die relative Längenänderung nach dem Druck.

Diagramm in Figur 1 zeigt, wie sich die Kurve mit der Geschwindigkeit der Druckänderung variiert:



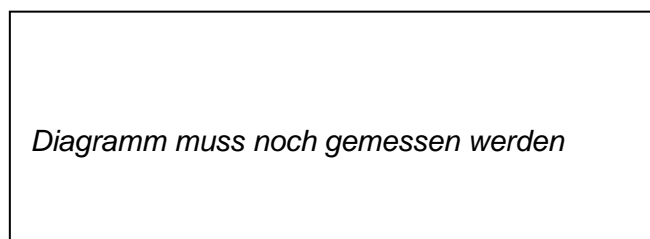
Figur 1

Das Diagramm in Figur 2 zeigt, wie sich die Kurve mit zunehmender Muskellast ändert:



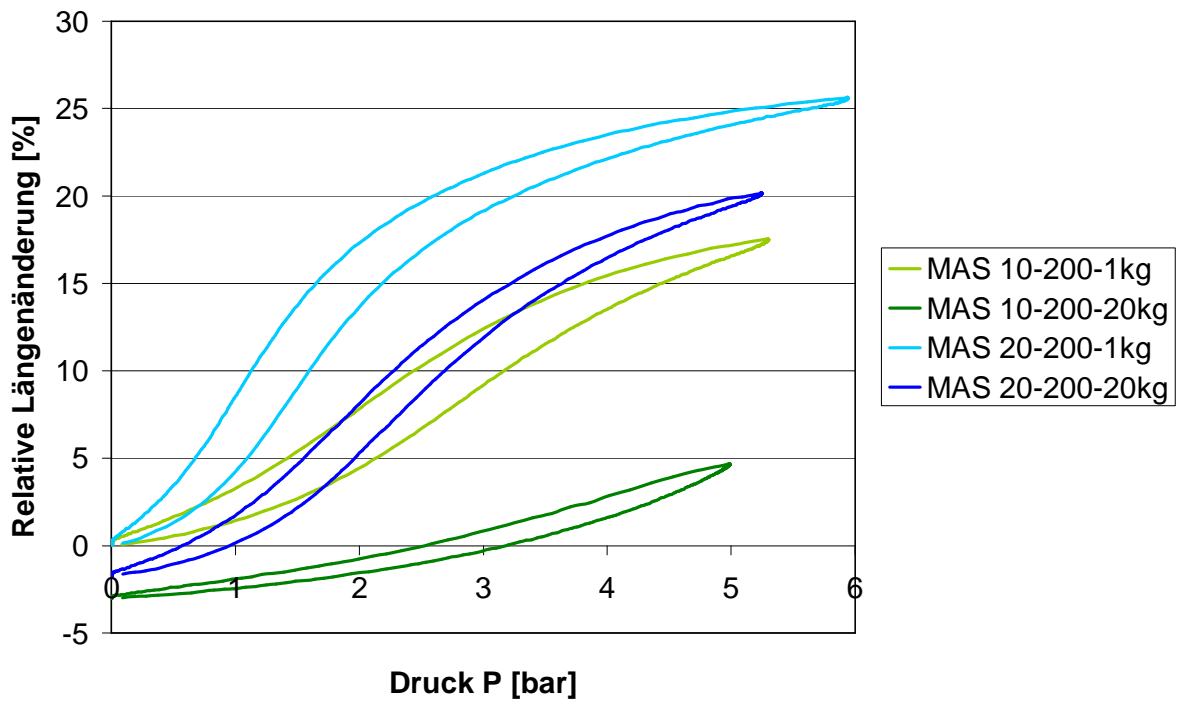
Figur 2

Die Figur 3 zeigt ein Diagramm mit Kurven von unterschiedlichem Maximaldruck:



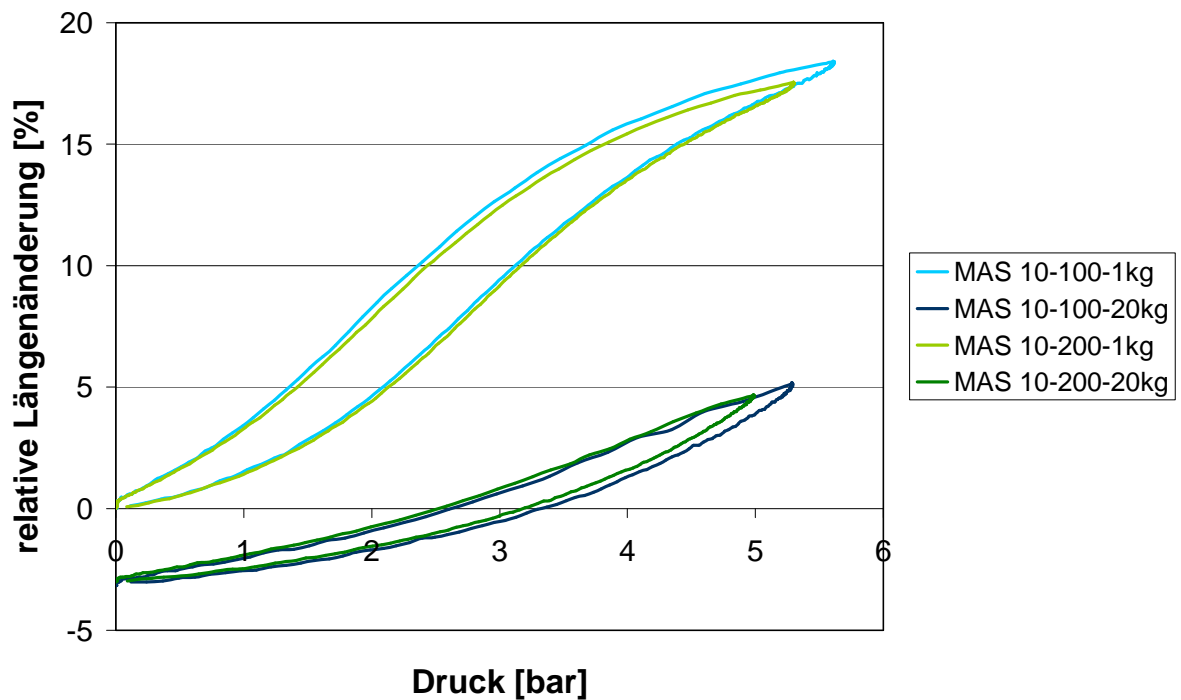
Figur 3

Die Figur 4 vergleicht die Kurven von Muskeln unterschiedlicher Durchmesser:



Figur 4: Vergleich der Kurven der Muskel von 10mm und 20mm Durchmesser

Die Figur 5 vergleicht die Kurven von Muskeln unterschiedlicher Längen:



Figur 5: Die Kurven für Muskeln unterschiedlicher Länge sind gleich

Weitere Parameter, die die Kurvenform beeinflussen hängen direkt mit den Muskelspezifikationen zusammen. Folgende Parameter sollten dabei berücksichtigt werden:

- Muskeldimensionen (Durchmesser, Länge)
- Muskeltyp (Fabrikationsart des Kevlargewebes und Kunststoff): beeinflusst das E-Modul und die Ansprechgeschwindigkeit, bzw Reaktionsverzögerung)
- Alterung (Wie verändert der Muskel sein Verhalten (E-Modul, Reaktionsverzögerung, Ermüdungserscheinungen) nach x Zyklen)

Zusätzlich sollte angegeben werden, wie sich die Länge des Muskels über die Zeit verändert, nachdem ich einen bestimmten Druck erreicht habe. Mehr dazu siehe Kapitel 3.4, Punkt (2).

2 Mathematische Approximation

Hysteresiskurven treten bei vielen physikalischen Phänomenen wie dem Magnetismus, der Elastoplastizität, Dielektrizität, Shape Memory Alloys, ... auf. Trotz der Wichtigkeit dieser Gebiete haben Mathematiker erst vor ca 30 Jahren angefangen, mathematische Modelle für Hysteresiskurven zu entwickeln. Die Theorien dieser Kurven sind relativ komplex und bedienen sich hoher Mathematik. Es ist deshalb fragwürdig, ob diese Modelle für die Anwendung im Ingenieurbereich geeignet und notwendig sind.

Folgende beide Werke bilden den Kern der Literatur zu mathematischen Modellen von Hysteresiskurven:

- A. VISINTIN (Hrsg.); Models of hysteresis, New York 1993, ISBN 0-582-20900-5
- I.D. Mayergoyz (Hrsg.); Mathematical Models of Hysteresis, ISBN 0-387-97352-4

Ich habe in dieser Arbeit versucht, ein einfacheres, reduzierteres mathematisches Modell für die Hysterese zu entwickeln. Es beruht darauf, beide Hystereseschenkel, sprich den „Hin-Weg“ und den „Rück-Weg“, durch zwei einzelne, aber voneinander abhängigen Funktionen zu beschreiben. Ich habe dabei zwei unterschiedliche Ansätze der Funktionen untersucht: das gaußsche Fehlerintegral und die Sigmoidkurve. Beide Funktionen weisen einen ähnlichen Kurvenverlauf auf.

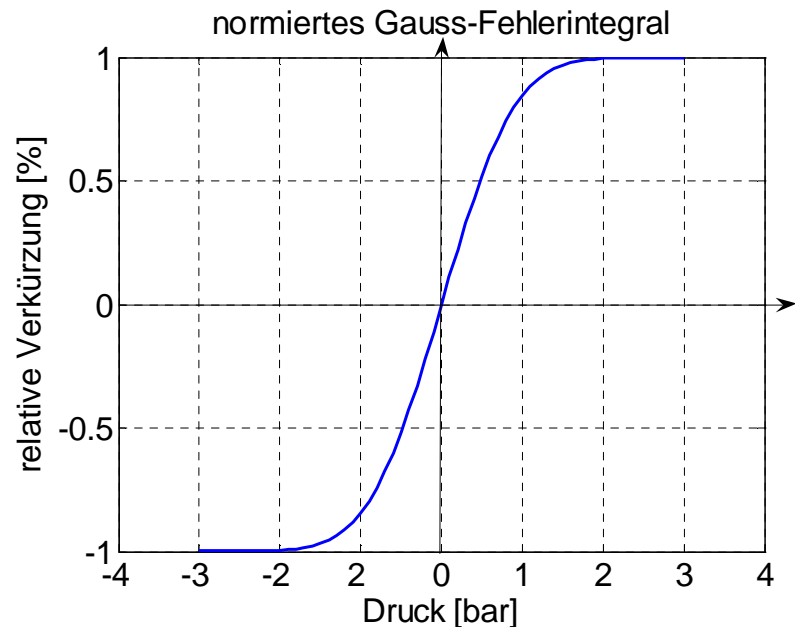
2.1 Approximation mittels des gaußschen Fehlerintegrals

Das gaußsche Fehlerintegral kommt aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wird im Deutschen auch Gaussfehler und im Englischen Errorfunction (erf) genannt. Es ist wie folgt definiert:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$$

Dies ist das normierte gaußsche Fehlerintegral, das heisst:

$$\operatorname{erf}(x = \infty) = 1.$$

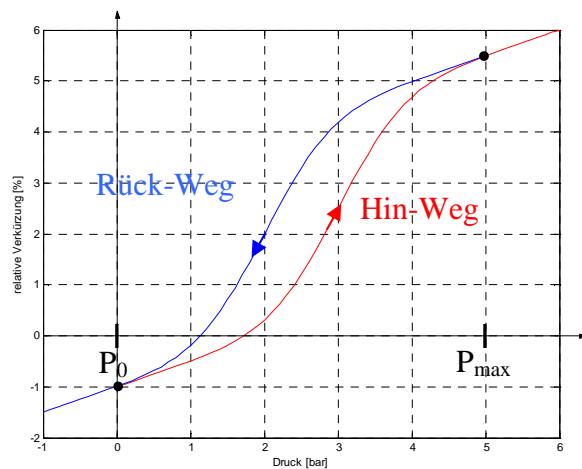


Die Funktion kann nun wie folgt manipuliert, und die entstehende Kurve somit den Messkurven angepasst werden. P stellt dabei den Druck im Muskel, X die relative Längenänderung ($x = \Delta l/l$) des Muskels dar.

$$\varepsilon(P) = a * \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{P_{\max}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{b^2}} dt + c * P + d$$

- Der Faktor a bewirkt eine Streckung der Kurve um a in P-Richtung.
- t_0 ist für die Lage des Wendepunktes in P-Richtung zuständig.
- b^2 verändert die Steilheit der Kurve bei gleich bleibender Position des Wendepunktes.
- durch Addition der Geraden $c*P$ kann die Steilheit der Grenzfunktionen eingestellt werden.
- d bewirkt eine Verschiebung der Kurve in P-Richtung

Die Hysterese wird nun aus zwei im Prinzip gleichen Kurven zusammengesetzt. Die zweite Kurve unterscheidet sich von der ersten lediglich durch den Wert von t_0 .



2.2 Approximation mittels der Sigmoidfunktion

Die Sigmoidfunktion ist wie folgt definiert:

$$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Sie lässt sich durch folgende Ergänzungen gut manipulieren und somit an die Messwerte anpassen:

$$\varepsilon(P) = \frac{a}{1 + b * e^{-c * P}} + d * P + f$$

Dabei stellen die Variablen folgende Größen dar:

- $\varepsilon(P) = \frac{\Delta l}{l_0}$ = relative Längenänderung des Muskels in Funktion des Druckes P
- P = Druck im Muskel
- a = Streckung der Sigmoidkurve in y- bzw. ε -Richtung
- b = verschiebt die Kurve in x- bzw. P-Richtung
- c = variiert die Steigung am Wendepunkt der Sigmoidkurve bei gleich bleibender Steigung der Asymptoten für x- bzw. P = $\pm\infty$
- d = dreht die Kurve im Koordinatensystem
- f = Verschiebung in y- bzw. ε -Richtung um +f

Mit Hilfe der Parameter a, b, c, d und f kann die Kurve an die vorherrschenden Bedingungen angepasst werden. Folgende Bedingungen sollten bei der Kurvenmanipulation berücksichtigt werden:

- Muskeldimensionen (Länge L, Durchmesser D)
- Muskeltyp (Modell-> E-Modul)
- die am Muskel angebrachte Last F
- $P' = \Delta P / \Delta t$ = Geschwindigkeit der Druckänderung
- P_{max} , der maximale Druckwert

Folgendes Kapitel soll nun zeigen, mit welchen Parametern die hier genannten Bedingungen im Kurvenverlauf berücksichtigt werden können.

2.3 Die Parameter der Sigmoidfunktion

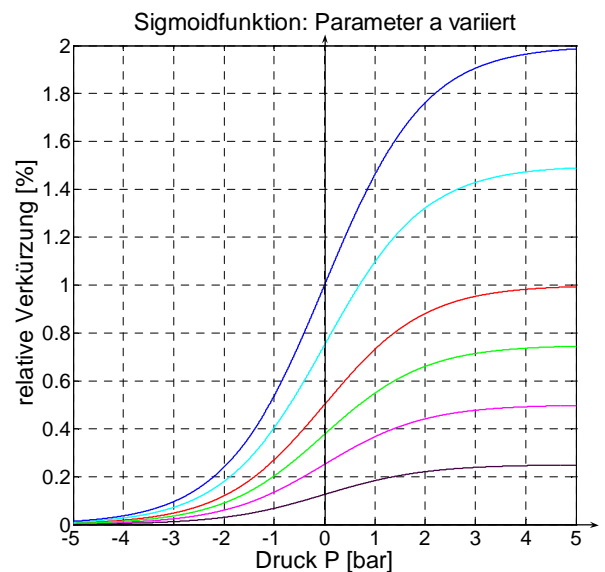
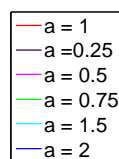
(1) Der Parameter a

a = Streckung der Sigmoidkurve in y- bzw. ε -Richtung

a = Funktion von (F, L, E, D)

Qualitativ

$|a| \uparrow \leftrightarrow F \uparrow$

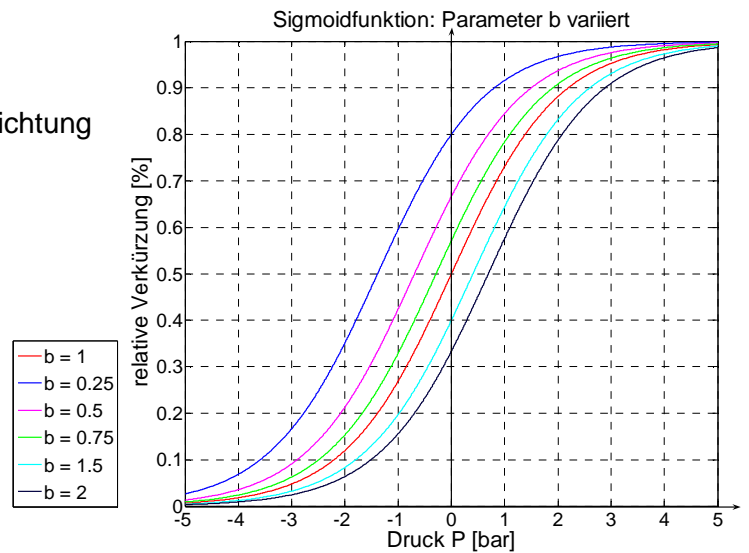


(2) Der Parameter b

b = verschiebt die Kurve in x- bzw. P-Richtung

b = Funktion von (D, F)

b = keine Funktion von (L)

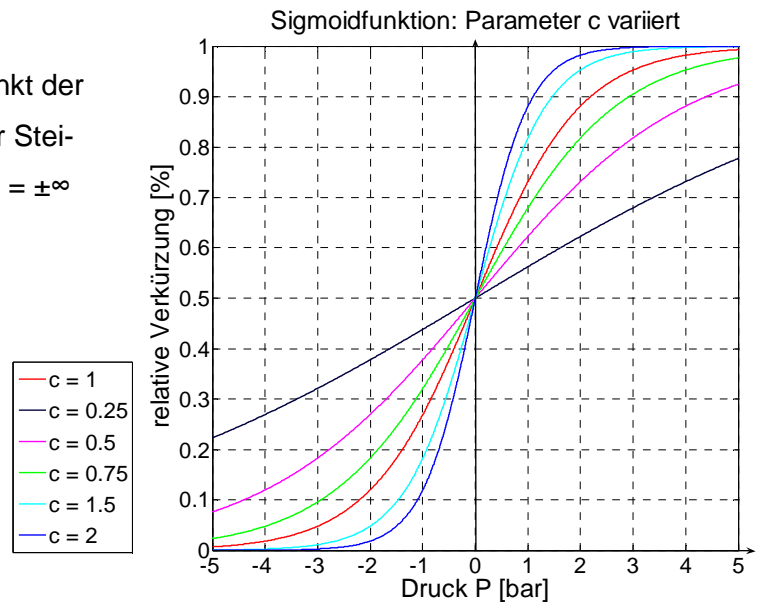


(3) Der Parameter c

c = variiert die Steigung am Wendepunkt der Sigmoidkurve bei gleich bleibender Steigung der Asymptoten für x- bzw. P = $\pm\infty$

c = Funktion von (D, F, P'?)

c = keine Funktion von (L)

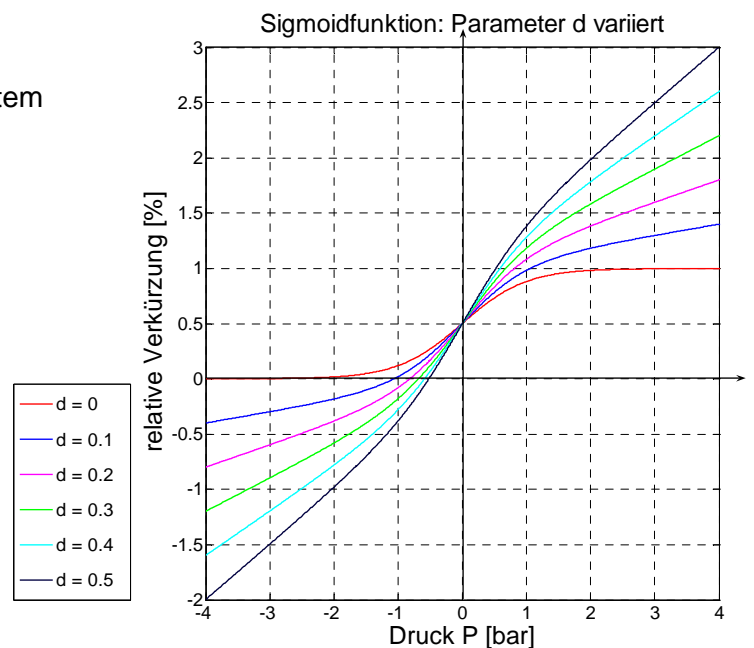


(4) Der Parameter d

d = dreht die Kurve im Koordinatensystem

d = Funktion von (F?, P'?)

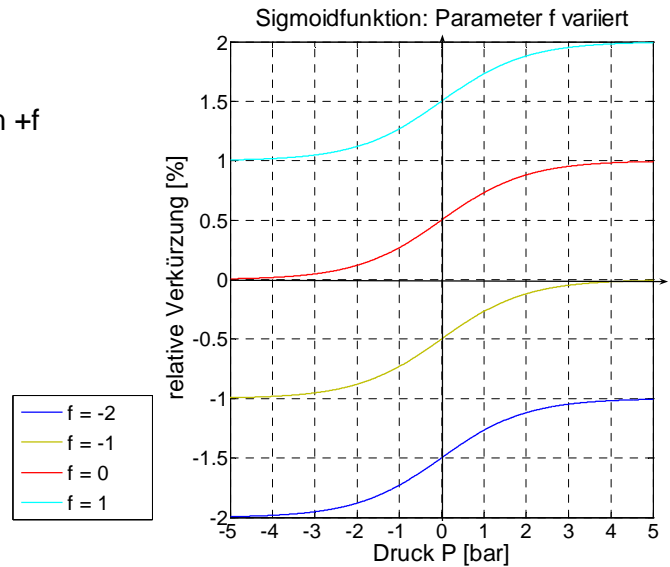
d = keine Funktion von (E)



(5) Der Parameter f

f = Verschiebung in y- bzw. ε -Richtung um +f

f = Funktion von (F, L, E, D)



Qualitativer Zusammenhang (den Messreihen entnommen, vgl. S. 45: MAS 20-200 mit S. 47: MAS 10-200):

- $|f| \uparrow \leftrightarrow F \uparrow$ $\sigma = \frac{F}{A} = E * \varepsilon$ $\varepsilon(P=0) = \frac{a}{1+b} + f$
- $|f| \downarrow \leftrightarrow L \uparrow ?$
- $|f| \downarrow \leftrightarrow E \uparrow$
- $|f| \downarrow \leftrightarrow D \uparrow$

2.4 Zweiter Schenkel der Hysteresiskurve: der „Rück-weg“

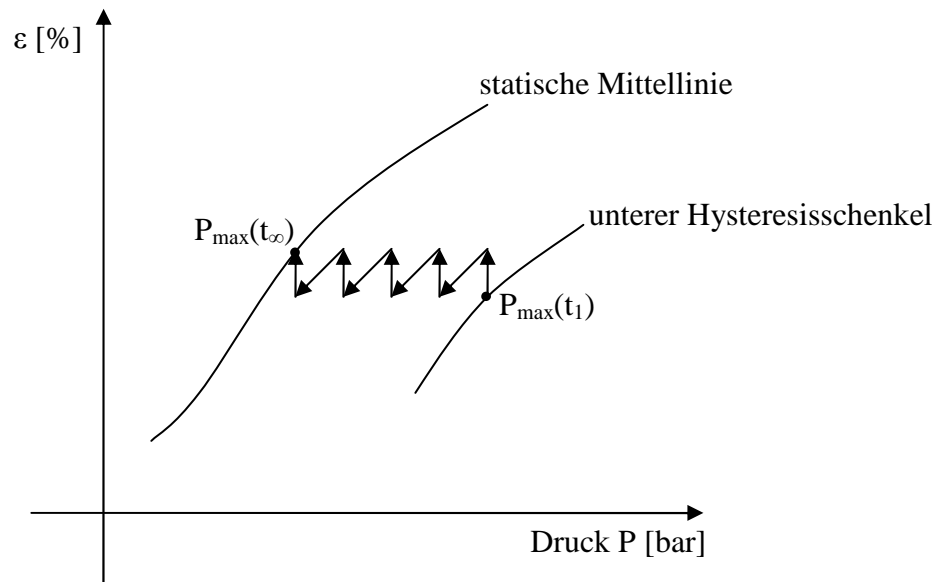
Problem: Ist der „Hin-weg“ der Hysterese bei bestimmten gegebenen Bedingungen approximiert, fragt sich, wie sich die Funktion des „Rück -Weges“ bei denselben Bedingungen berechnen lässt. Wie ändert sich die Rückkurve mit variierendem P_{\max} ?

(1) Ein variierendes P_{\max} verändert die Form des „Hin-Weges“ nicht, bis auf den Punkt $(P_{\max}, \varepsilon_{\max})$, in dem der „Hin-weg“ endet, das heißt die Parameter (a, b, c, d, f) des „Hin-Weges“ bleiben dieselben.

(2) Wie sieht der „Rück-Weg“ aus? Was geschieht, wenn ich im Maximalpunkt $(P_{\max}, \varepsilon_{\max})$ kurz verweile?

Verweile ich in im Maximalpunkt, so nimmt die relative Längenänderung aufgrund der Verformungsträgheit des Materials zu. Um die aktuelle Position des Muskelendes

aufrecht zu erhalten, was in den meisten Anwendungen wünschenswert sein wird, muss der Druck nachgeregelt werden. Folglich wandert der Maximalpunkt mit der Zeit iterativ auf die statische Mittellinie der Hysterese zu.



Dies bedeutet, dass die Kurve des „Rück-Weges“ in Realität, je nachdem wie lange in P_{\max} verweilt wird, nicht mehr im Punkt $P_{\max}(t_1)$ ansetzt. Es ist deshalb zu untersuchen, welcher Fehler entsteht, wenn zur Approximation trotzdem der Punkt $P_{\max}(t_1)$ als Startpunkt gewählt wird.

In diesem Modell wird die Kurve des „Rück-Weges“ wie folgt approximiert:

- i. Startpunkt ($P_{\max}(t_1), \epsilon(t_1)$)
- ii. die Kurvenform entspricht derjenigen des „Hin-Weges“, wird aber gedreht (Faktor d variiert), und in x - und y - bzw. in P - und ϵ - Richtung verschoben (Faktor b und f ändern)
- iii. Bedingung: die Kurve muss als Endpunkt den Ausgangspunkt der „Hin-kurve“ ($P(t_0), \epsilon(t_0)$) besitzen.

2.5 Berechnung der Funktion für die Kurve des „Rück-Weges“

„Hin-Weg“:
$$\epsilon_h(P) = \frac{a}{1 + b_h * e^{-cP}} + d_h * P + f_h$$

„Rück-Weg“:
$$\epsilon_r(P) = \frac{a}{1 + b_r * e^{-cP}} + d_r * P + f_r$$

Aus den oben genannten Bedingungen für die Approximation folgen die beiden Gleichungen:

Bedingung (iii): $\varepsilon_h(P=0) = \varepsilon_r(P=0)$

$$\frac{a}{1+b_h} + f_h = \frac{a}{1+b_r} + f_r$$

$$f_r = \frac{a}{1+b_h} - \frac{a}{1+b_r} + f_h \quad (1)$$

Bedingung (i): $\varepsilon_h(P=P_{\max}) = \varepsilon_r(P=P_{\max})$

$$\frac{a}{1+b_h * e^{-cP_{\max}}} + d_h * P_{\max} = \frac{a}{1+b_r * e^{-cP_{\max}}} + d_r * P_{\max} + \frac{a}{1+b_h} - \frac{a}{1+b_r}$$

$$\frac{1}{a} \left[\frac{a}{1+b_h * e^{-cP_{\max}}} + d_h * P_{\max} - d_r * P_{\max} - \frac{a}{1+b_h} \right] = \frac{1}{1+b_r * e^{-cP_{\max}}} - \frac{1}{1+b_r}$$

:=K

$$K = \frac{1+b_r}{(1+b_r * e^{-cP_{\max}})(1+b_r)} - \frac{1+b_r * e^{-cP_{\max}}}{(1+b_r * e^{-cP_{\max}})(1+b_r)}$$

$$K = \frac{b_r - b_r * e^{-cP_{\max}}}{1+b_r + b_r * e^{-cP_{\max}} + b_r^2 * e^{-cP_{\max}}}$$

daraus folgt die quadratische Gleichung:

$$0 = K * e^{-cP_{\max}} * b_r^2 + (K + K * e^{-cP_{\max}} + e^{-cP_{\max}} - 1) * b_r + K$$

$$b_r = \frac{-(K + K * e^{-cP_{\max}} + e^{-cP_{\max}} - 1) \pm \sqrt{(K + K * e^{-cP_{\max}} + e^{-cP_{\max}} - 1)^2 - 4 * K * e^{-cP_{\max}}}}{2 * K * e^{-cP_{\max}}} \quad (2)$$

Somit ist b_r als Funktion von b_h , P_{\max} , d_h , d_r , a und c berechnet. Diese Formel (2) eingesetzt in (1) liefert f_r als Funktion von b_h , P_{\max} , d_h , d_r , a und c . Das heisst, bei angenommener Steigung d_r der „Rück-Kurve“ lassen sich die Parameter b_r und f_r für die „Rück-Kurve“ mit den oben genannten Gleichungen berechnen.

2.6 Noch ausstehende Messungen

- Die Druckänderungsgeschwindigkeit P' variieren, sonst alle Bedingungen konstant halten.

Messen für drei unterschiedliche Belastungen F mit:

| |
|----------------|
| MAS 10-100 neu |
| MAS 20-100 neu |
| MAS 10-200 neu |
| MAS 10-100 alt |

- P_{\max} variieren, alles andere konstant halten.

3 Anhang: Variabeldeklaration

F = am Muskel angebrachte Last [Newton]

L = Muskellänge [m]

D = Muskeldurchmesser [m]

E = Elastizitätsmodul [Newton/m²]

P = Druck [bar]

P' = dP/dt = Druckänderungsgeschwindigkeit

ϵ = $\Delta L/L_0$ = relative Längenänderung des Muskels

A = Fläche des muskelquerschnittes [m²]

a, b, c, d, f = Parameter der Approximationsfunktion